# Probabilidad y Estadística

Agustín G. Bonifacio

UNSL

## Variables Aleatorias

- Si bien nuestro objetivo principal es siempre calcular probabilidades de eventos en $\mathcal{A}$, a veces la descripción de $\Omega$ puede ser complicada si éste no es un conjunto de números (los eventos en $\mathcal{A}$ tampoco serán numéricos en este caso).
- La noción de *variable aleatoria* es un recurso que permite mirar ciertos eventos en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ como eventos numéricos.

## Definición

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Una función $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaga

$$[X \leq r] \equiv \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq r\} \in \mathcal{A}$$

para cada $r \in \mathbb{R}$ se denomina variable aleatoria (v.a.).

- la acción de la variable aleatoria consiste entonces en asignarle un valor numérico a los resultados posibles en $\Omega$.
- La distribución de probabilidad $P$ del espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ no interviene en la definición de variable aleatoria. Sin embargo, es importante para determinar su función de distribución, que definiremos más adelante.

## Ejemplo

Consideremos el experimento de arrojar una moneda. Entonces $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ es tal que $\Omega = \{C, S\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ y $P(\{C\}) = P(\{S\}) = \frac{1}{2}$. Sea $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$X(C) = 1, \quad X(S) = 0.$$

Entonces $X$ es una variable aleatoria (ver cómo son los conjuntos $[X \leq r]$).

## Ejemplo

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad que modela el arrojar dos dados balanceados distinguibles. Entonces $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ y $P$ es la distribución de probabilidad determinada por la función $\tilde{p} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\tilde{p}(i, j) = \frac{1}{36}$ para cada $(i, j) \in \Omega$.

La función $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $X(i, j) = i + j$ para cada $(i, j) \in \Omega$ es una v.a.

La función $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $Y(i, j) = i$ para cada $(i, j) \in \Omega$ es una v.a.

La función $Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $X(i, j) = j$ para cada $(i, j) \in \Omega$ es una v.a.

Notemos que $X = Y + Z$.

- Estaremos interesados en calcular la probabilidad de que una v.a. tome algún determinado valor, o que el valor caiga dentro de ciertos límites predeterminados.
- En el primer ejemplo, nos podría interesar conocer $P([X=1])$. Claramente, esto equivale a la probabilidad de que salga $C$.
- En el segundo ejemplo, nos podría interesar calcular $P([8 \leq X \leq 10]) = \frac{1}{6}$.

### Definición

Sea $X$ una v.a. definida sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. La función definida por $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que asigna a cada $r \in \mathbb{R}$,

$$F_X(r) = P([X \leq r])$$

se denomina función de distribución de la v.a. $X$.

### Observación

Nótese que $F_X$ está bien definida.

## Ejemplo

Consideremos $X$ definida en el primer ejemplo. Recordemos que $X(S) = 0$ y $X(C) = 1$. Entonces:

$$F_X(r) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad r < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad 0 \leq r < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leq r \end{cases}$$

Obsérvese que:

1. $F_X$ es no decreciente,
2. $\lim_{r \to -\infty} F_X(r) = 0$ y $\lim_{r \to +\infty} F_X(r) = 1$,
3. $F_X$ es continua por derecha.

**Lema**

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad con $\mathcal{A}$ una $\sigma$-álgebra de eventos.

(i) Si $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ es una sucesión en $\mathcal{A}$ tal que $A_1 \supseteq \ldots \supseteq A_n \supseteq \ldots$, entonces $P(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$,

(ii) Si $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ es una sucesión en $\mathcal{A}$ tal que $A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$, entonces $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$.

### Teorema

Sea $X$ una v.a. definida sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, donde $\mathcal{A}$ una $\sigma$-álgebra de eventos. Entonces, la función de distribución $F_X$ de $X$ satisface:

(i) $F_X$ es no decreciente y no negativa,

(ii) $\lim_{r \to -\infty} F_X(r) = 0$ y $\lim_{r \to +\infty} F_X(r) = 1$,

(iii) $F_X$ es continua por derecha.

### Observación

Para calcular probabilidades, a veces se trabaja con el par $(X, F_X)$ donde $X$ representa a la v.a. y $F_X$ es una función (de distribución) que satisface (i), (ii) y (iii) del Teorema anterior sin hacer ninguna mención explícita del espacio de probabilidad sobre el cual $X$ está definida.

- Sea $X$ una v.a. definida sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Supongamos conocida su función de distribución, $F_X$.
- Consideremos los siguientes eventos:

$$\begin{aligned}
A &= [r_1 < X \leq r_2] \equiv \{\omega \in \Omega : r_1 < X(\omega) \leq r_2\}, \\
B &= [r_1 < X < r_2] \equiv \{\omega \in \Omega : r_1 < X(\omega) < r_2\}, \\
C &= [r_1 \leq X < r_2] \equiv \{\omega \in \Omega : r_1 \leq X(\omega) < r_2\}, \\
D &= [r_1 \leq X \leq r_2] \equiv \{\omega \in \Omega : r_1 \leq X(\omega) \leq r_2\}.
\end{aligned}$$

  donde $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $-\infty \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$.
- Nuestro objetivo es dar una forma sencilla de cálculo para eventos como los anteriores en términos de la función de distribución de $X$.

- Veamos como se calcula $P(A)$. Notemos primero que

$$[r_1 < X \leq r_2] = [X \leq r_2] - [X \leq r_1].$$

Como además $[X \leq r_1] \subseteq [X \leq r_2]$, tenemos que

$$P(A) = P([X \leq r_2]) - P([X \leq r_1]) = F_X(r_2) - F_X(r_1).$$

- Antes de dar las fórmulas para $B, C$ y $D$. Recordemos que

$$F_X(r^-) \equiv \lim_{0<\varepsilon\to 0} F_X(r-\varepsilon).$$

- Las probabilidades restantes son las siguientes:

$$P(B) = P([r_1 < X < r_2]) = F_X(r_2^-) - F_X(r_1),$$

$$P(C) = P([r_1 \leq X < r_2]) = F_X(r_2^-) - F_X(r_1^-),$$

$$P(D) = P([r_1 \leq X \leq r_2]) = F_X(r_2) - F_X(r_1^-).$$

## Ejemplo

Consideremos la v.a. $X$ con función de distribución $F_X$ dada por:

$$F_X(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ r < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq r < 1, \\ 1 & \text{si } 1 \leq r. \end{cases}$$

Se propone completar la siguiente tabla:

| $r_1$ | $r_2$ | $P(A)$ | $P(B)$ | $P(C)$ | $P(D)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $1/2$ | $2$ | | | | |
| $1$ | $2$ | | | | |
| $1/2$ | $1$ | | | | |
| $0$ | $1$ | | | | |

- Otra clase de eventos para los cuales resulta necesario conocer su probabilidad es la de los eventos de tipo $[X = r]$ para $r \in \mathbb{R}$.

### Teorema

Si $X$ es una v.a. con función de distribución $F_X$, entonces

$$P([X = r]) = F_X(r) - F_X(r^-)$$

para todo $r \in \mathbb{R}$.

### Corolario

Si $F_X$ es continua en $r \in \mathbb{R}$, entonces

$$P([X = r]) = 0.$$

**Ejemplo**

Consideremos nuevamente la función de distribución

$$F_X(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; r < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq r < 1, \\ 1 & \text{si } 1 \leq r. \end{cases}$$

Aquí, $P([X = 0]) = 1/2$, $P([X = 1]) = 1/2$ y $P([X = 1/2]) = 0$. Además, por el Corolario podemos afirmar que $P([X = r]) = 0$ para todo $r \neq 0, 1$.

- A partir de $F_X$ y del Teorema anterior, hemos construido una nueva función $f_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que hace la asignación $r \mapsto P([X = r])$. Esta es la función de densidad de la v.a. $X$.
- Más adelante probaremos que

$$F_X(r) = \sum_{\{r_i \in RgX \; : \; r_i \leq r\}} f_X(r_i).$$