Probabilidad y Estadística

Agustín G. Bonifacio

UNSL

Variables Aleatorias

Esquema de la Clase

1. Variables Aleatorias
   - Definición
   - Ejemplos
2. Función de Distribución
   - Definición y Ejemplos
   - Propiedades
3. Cálculo de Probabilidades

Antes de comenzar recordemos que un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ viene dado por:

- ◇ Un conjunto Ω (*espacio muestral*),
- ◇ Una σ-álgebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ (*familia de eventos admisibles*),
- ◇ Una función $P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ (*distribución de probabilidad*) que satisface:
  - (i) $P(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{A}$,
  - (ii) $P(\Omega) = 1$,
  - (iii) Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de eventos admisibles tales que $A_i \cap A_j = \emptyset$ siempre que $i \neq j$, entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

- Si bien nuestro objetivo principal es siempre calcular probabilidades de eventos en $\mathcal{A}$, a veces la descripción de Ω puede ser complicada si éste no es un conjunto de números (los eventos en $\mathcal{A}$ tampoco serán numéricos en este caso).
- La noción de *variable aleatoria* es un recurso que permite mirar ciertos eventos en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ como eventos numéricos.

Definición

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Una función $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaga

$$[X \leq r] \equiv \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq r\} \in \mathcal{A}$$

para cada $r \in \mathbb{R}$ se denomina variable aleatoria (v.a.).

Observaciones

- La acción de la variable aleatoria consiste entonces en asignarle un valor numérico a los resultados posibles en Ω.
- La distribución de probabilidad P del espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ no interviene en la definición de variable aleatoria. Sin embargo, es importante para determinar su *función de distribución*, que definiremos más adelante.

Ejemplo 1 (Tirada de una moneda balanceada)

Aquí $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ es tal que

$$\Omega = \{C, S\}, \quad \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) \quad \text{y} \quad P(\{C\}) = P(\{S\}) = \frac{1}{2}.$$

◇ La función $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$X(C) = 1, \quad X(S) = 0.$$

es una variable aleatoria ya que

$$[X \leq r] = \begin{cases} \emptyset & \text{si } r < 0, \\ \{S\} & \text{si } 0 \leq r < 1, \\ \Omega & \text{si } r \geq 1. \end{cases}$$

y, en cualquier caso, $[X \leq r] \in \mathcal{A}$.

Ejemplo 2 (Tirada de dos dados balanceados y distinguibles)

Aquí $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ es tal que

$$\Omega = \{(i,j) : 1 \leq i,j \leq 6\}, \quad \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) \quad \text{y} \quad P \text{ es equiprobable.}$$

- La función $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $X(i,j) = i + j$ para cada $(i,j) \in \Omega$ es una v.a.
- La función $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $Y(i,j) = i$ para cada $(i,j) \in \Omega$ es una v.a.
- La función $Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $X(i,j) = j$ para cada $(i,j) \in \Omega$ es una v.a.
- Notemos que $X = Y + Z$.

- Estamos interesados en calcular la probabilidad de que una v.a. tome algún determinado valor, o que el valor caiga dentro de ciertos límites predeterminados.
- En el Ejemplo 1, nos podría interesar conocer $P([X=1])$. Claramente, esto equivale a la probabilidad de que salga C. Es decir, $P([X=1]) = P(\{C\}) = \frac{1}{2}$.
- En el Ejemplo 2, nos podría interesar calcular la probabilidad de que la suma de los dados resulte entre 10 y 12, lo que denotamos $P([10 \leq X \leq 12])$. Tal probabilidad es equivalente a la probabilidad del evento

$$\begin{aligned} A &= \{(i,j) \in \Omega : 10 \leq i+j \leq 12\} \\ &= \{(5,5),(6,4),(4,6),(5,6),(6,5),(6,6)\} \end{aligned}$$

Por lo que $P([10 \leq X \leq 12]) = P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Definición

Sea X una v.a. definida sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. La función $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que asigna a cada $r \in \mathbb{R}$ el valor

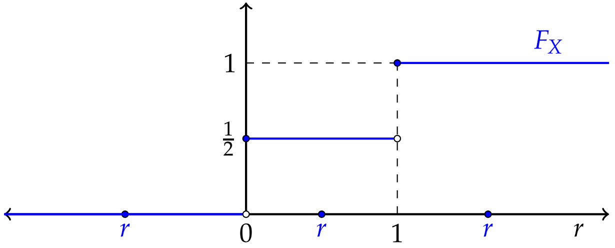
$$F_X(r) = P([X \leq r])$$

se denomina función de distribución de la v.a. X.

Observación

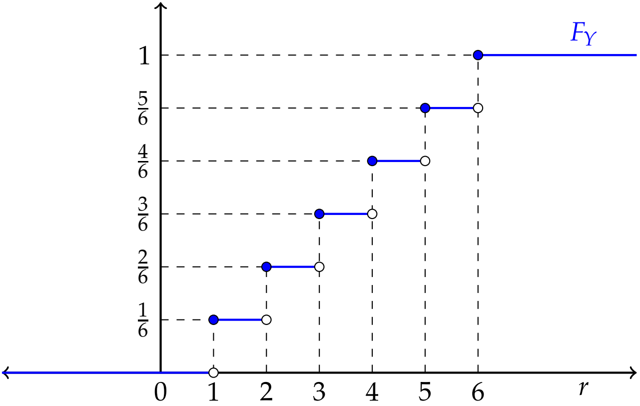
Nótese que F_X está bien definida ya que $[X \leq r]$ para todo $r \in \mathbb{R}$.

Para la v.a. del Ejemplo 1, construyamos F_X :



$$[X \leq r] = \begin{cases} \emptyset & \text{si } r < 0 \\ \{S\} & \text{si } 0 \leq r < 1 \\ \Omega & \text{si } r \geq 1 \end{cases} \qquad F_X(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq r < 1 \\ 1 & \text{si } r \geq 1 \end{cases}$$

Para la v.a. Y del Ejemplo 2, F_Y viene dada por:



Por ejemplo, cuando $2 \leq r < 3$, $[Y \leq r] = \{(1,j),(2,j) : 1 \leq j \leq 6\}$.
Por lo tanto, $F_Y(r) = \frac{12}{36} = \frac{2}{6}$.

Observación

- F_X es no decreciente,
- $\lim_{r\to-\infty} F_X(r) = 0$ y $\lim_{r\to+\infty} F_X(r) = 1$,
- F_X es continua por derecha.

Lema

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Entonces:

(i) Si $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ es una sucesión en $\mathcal{A}$ tal que $A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$, entonces $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} P(A_i)$.

(ii) Si $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ es una sucesión en $\mathcal{A}$ tal que $A_1 \supseteq \ldots \supseteq A_n \supseteq \ldots$, entonces $P(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} P(A_i)$,

Prueba. Fuera del alcance de este curso.

Teorema

Sea X una v.a. definida sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Entonces, la función de distribución F_X de X satisface:

(i) F_X es no decreciente y no negativa,

(ii) $\lim_{r \to -\infty} F_X(r) = 0$ y $\lim_{r \to +\infty} F_X(r) = 1$,

(iii) F_X es continua por derecha.

Observación

Para calcular probabilidades, a veces se trabaja con el par (X, F_X) donde X representa a la v.a. y F_X es una función (de distribución) que satisface (i), (ii) y (iii) del Teorema anterior sin hacer ninguna mención explícita del espacio de probabilidad sobre el cual X está definida.

- Sea X una variable aleatoria definida sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ y supongamos conocida su función de distribución, F_X.

- Consideremos los siguientes eventos:

$$\begin{aligned}
A &= [r_1 < X \leq r_2] \equiv \{\omega \in \Omega : r_1 < X(\omega) \leq r_2\}, \\
B &= [r_1 < X < r_2] \equiv \{\omega \in \Omega : r_1 < X(\omega) < r_2\}, \\
C &= [r_1 \leq X < r_2] \equiv \{\omega \in \Omega : r_1 \leq X(\omega) < r_2\}, \\
D &= [r_1 \leq X \leq r_2] \equiv \{\omega \in \Omega : r_1 \leq X(\omega) \leq r_2\}.
\end{aligned}$$

donde $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ y además $-\infty \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$.

- Nuestro objetivo es dar una forma sencilla de cálculo para eventos como los anteriores en términos de la función de distribución de X.

- Veamos como se calcula $P(A)$. Notemos primero que

$$[r_1 < X \leq r_2] = [X \leq r_2] - [X \leq r_1].$$

Como además $[X \leq r_1] \subseteq [X \leq r_2]$, tenemos que

$$P(A) = P([X \leq r_2]) - P([X \leq r_1]) = F_X(r_2) - F_X(r_1).$$

- Antes de dar las fórmulas para B, C y D. Recordemos que

$$F_X(r^-) \equiv \lim_{0<\varepsilon\to 0} F_X(r-\varepsilon).$$

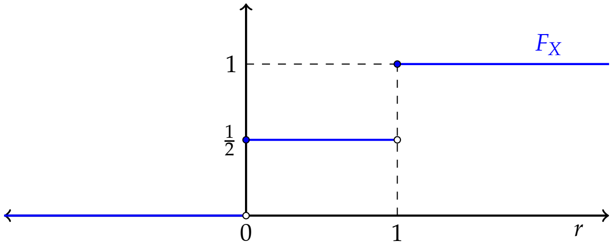
- Las probabilidades restantes son las siguientes:

$$P(B) = P([r_1 < X < r_2]) = F_X(r_2^-) - F_X(r_1),$$

$$P(C) = P([r_1 \leq X < r_2]) = F_X(r_2^-) - F_X(r_1^-),$$

$$P(D) = P([r_1 \leq X \leq r_2]) = F_X(r_2) - F_X(r_1^-).$$

Consideremos la v.a. X con función de distribución F_X dada por:



Se propone completar la siguiente tabla:

r_1	r_2	$P(A)$	$P(B)$	$P(C)$	$P(D)$
$1/2$	2	$1/2$			
1	2		0		
$1/2$	1			0	
0	1				1

- Otra clase de eventos para los cuales resulta necesario conocer su probabilidad es la de los eventos de tipo $[X = r]$ para $r \in \mathbb{R}$.

Teorema

Si X es una v.a. con función de distribución F_X, entonces

$$P([X = r]) = F_X(r) - F_X(r^-)$$

para todo $r \in \mathbb{R}$.

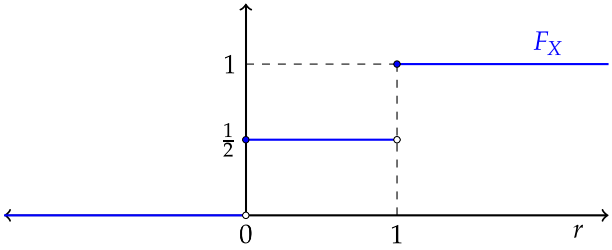
Corolario

Si F_X es continua en $r \in \mathbb{R}$, entonces

$$P([X = r]) = 0.$$

Consideremos nuevamente la función de distribución

$$F_X(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; r < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq r < 1, \\ 1 & \text{si } 1 \leq r. \end{cases}$$



Aquí, $P([X = 0]) = 1/2$, $P([X = 1]) = 1/2$ y $P([X = 1/2]) = 0$. Además, por el Corolario podemos afirmar que $P([X = r]) = 0$ para todo $r \notin \{0, 1\}$.