Probabilidad y Estadística

Agustín G. Bonifacio

UNSL

Experimentos Aleatorios, Espacios Muestrales

Experimentos Aleatorios

Asumiremos como concepto básico la idea de experimento.
Algunos ejemplos:

- Un investigador médico suministra un medicamento a un paciente y observa el resultado,
- Se tira una moneda al aire y se observa el resultado al caer,
- Se arroja una moneda al aire infinitas veces y se cuenta el número de tiradas que se requirieron hasta que salió la primera cara.
- . . .

Asociada a la realización del experimento, cualquiera sea su naturaleza (concreta o conceptual), tenemos un conjunto de resultados posibles.

En nuestro primer ejemplo (observar el resultado de suministrar un medicamento), el investigador podría estar interesado en verificar si hay un aumento en el número de glóbulos rojos del paciente. Algunas descripciones del conjunto de resultados posibles son las siguientes:

- $\Omega_1 = \{NA, A\}$, donde A significa "aumento" y NA "no aumento",
- $\Omega_2 = \{0, 1\}$, donde 0 significa que no hubo aumento y 1 que sí lo hubo.
- $\Omega_3 = \{0, 1, 2, \ldots, 10000, \ldots, 2000000\}$, si el investigador decide contar el número de glóbulos rojos.
- $\Omega_4 = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\} = \mathbb{N}$, si el investigador decide contar el número de glóbulos rojos pero no conoce 'a priori' una cota superior para los mismos.

A pesar de que se pueden considerar varios resultados posibles, cada vez que se realiza un experimento *sólo se obtiene uno de ellos.* Durante el curso, cuando hablemos de un experimento, asumiremos que el espacio de resultados posibles Ω ha sido fijado.

Definición

Un experimento $\mathcal{E}$ se dice aleatorio si Ω tiene más de un elemento. Si Ω tiene exactamente un elemento, el experimento $\mathcal{E}$ se dice determinístico.

Muestra y Población

Supongamos que tenemos un experimento $\mathcal{E}$ y que hemos determinado un Ω correspondiente.
Si realizamos el experimento una vez, obtenemos un resultado $\omega_1 \in \Omega$. Si lo realizamos una segunda vez, obtenemos un resultado $\omega_2 \in \Omega$...

Definición

Una n-upla $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$, con $\omega_i \in \Omega$, de resultados posibles recibe el nombre de muestra de tamaño n.

Ejemplo

Consideremos el experimento $\mathcal{E}$ de suministrar un medicamento con el espacio de resultados posibles $\Omega_1 = \{NA, A\}$. Una muestra de tamaño 5 asociada con $\mathcal{E}$ es una 5-upla $(S_1, \ldots, S_5)$ donde S_i, $i = 1, \ldots, 5$ será igual a NA ó A según corresponda.

La descripción y obtención de muestras de un tamaño dado asociadas con un experimento parece ser un problema relativamente sencillo. Sin embargo, la descripción u obtención de la población asociada a un experimento son problemas que se resuelven en forma explícita sólo en casos especiales.

Ejemplo

En una clase de 100 alumnos se elige uno al azar y se mide su altura. Para este experimento, la población es una 100-upla $(h_1, h_2, \ldots, h_1 00)$ en donde están representadas las alturas de todos los alumnos.

Observación

Hay una diferencia entre la idea de *población* y la de *conjunto de resultados posibles*: los valores en una población pueden repetirse, lo que hace posible estudiar la distribución de las alturas de los alumnos.

Ejemplo

Volviendo al ejemplo de suministrar un remedio, la población dependerá del grupo de pacientes que se desee estudiar. Si tal grupo consiste en todos los pacientes anémicos ingresados en un determinado hospital en un cierto año, eventualmente podría llegar a describirse la población estadística. Pero generalmente el grupo de pacientes al cual apunta la investigación es el *total* de las personas anémicas.

Como en general la obtención del total de la población asociada a un experimento no es posible, la alternativa que se abre es la de utilizar un modelo que represente la población estadística desconocida y emplear este modelo para sacar conclusiones.
Una manera de construir modelos que garanticen, en cierta medida, esta aproximación es utilizando la información contenida en las muestras.
(Ver Esquema Metodológico.)

Un médico debe decidir entre administrar o no un nuevo compuesto de hierro a un paciente anémico. Sabe que dicho compuesto ha sido administrado a 30 pacientes anémicos y que en 20 de ellos se observó un aumento significativo de los glóbulos rojos respecto del nivel que tenían antes de iniciar el tratamiento. ¿Qué decidiría usted?

Como $\frac{2}{3}$ de los pacientes en el experimento mejoraron, entonces hay una mayor chance de mejoría que de no mejoría. Decido en consecuencia administrar la nueva droga.

La muestra (30 pacientes) permite obtener una *medida de la posibilidad* de que un suceso ocurra (la mejoría del paciente). En función de esta medida se toma la decisión.

Cada vez que enfrentamos una decisión importante que involucra riesgos establecemos un sistema de estas medidas de posibilidad sobre el conjunto de alternativas disponibles y tomamos una decisión de acuerdo con ese sistema.

Nuestro curso está destinado a proveer métodos para tomar buenas decisiones (lo que no significa que siempre se puedem garantizar buenos resultados).

La primera parte del curso está destinada a dar una formalización de lo que hemos llamado *medidas de posibilidad* y a proveer formas de describirlas.

Espacio Muestral

Definición

Dado un experimento $\mathcal{E}$, el espacio de resultados posibles asociado se llamará espacio muestral y se denotará Ω.

Observación

Asumimos que los resultados son mutuamente excluyentes.

Dependiendo de lo que estoy interesado en estudiar será la elección del espacio muestral.

Ejemplo

El experimento consiste en tirar la bola de la ruleta.

- Una posible descripción de los resultados puede ser: $\Omega_1 = \{0, 1, 2, \ldots, 36\}$,
- Si estoy jugando a docenas, la siguiente descripción es más adecuada: $\Omega_2 = \{0, 1^{\circ}$ docena, 2° docena, 3° docena$\}$,
- Si estoy jugando a color: $\Omega_3 = \{0,$ rojo, negro$\}$
- Si juego a pares e impares: $\Omega_4 = \{0,$ pares, impares$\}$

Un experimento será (por ahora) un par $(\mathcal{E}, \Omega)$, donde lo que realmente importa es Ω.

Definición

Sea $(\mathcal{E}, \Omega)$ un experimento. Los subconjuntos de Ω se denominan eventos. Los eventos con un único elemento se denominan eventos simples.

Definición

Sea $(\mathcal{E}, \Omega)$ un experimento. La familia de eventos se denota por $\mathcal{P}(\Omega)$. El evento que no contiene ningún elemento se denomina evento imposible y se denota por $\emptyset$. El evento que contiene todos los elementos de Ω se denomina evento cierto y se denota con Ω.

Ejemplo

Se tira una moneda. Los resultados posible son cara (C) y sello (S). Por lo tanto, $\Omega = \{C, S\}$ y $\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{C\}, \{S\}, \Omega\}$.

Ejemplo

Se tira un dado y se observa lo que sale en la cara superior.
Entonces:
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Algunos eventos son:
$A = \{1\}, B = \{1, 3, 5\}$ y $C = \{4, 5, 6\}$.
El evento A es simple. En general, la descripción de un evento no es única. Consideremos el siguiente evento:
$D = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ es impar}\}$,
entonces $D = B$.

Definición

Sea $(\mathcal{E}, \Omega)$ un experimento y $A \in \mathcal{P}(\omega)$ un evento. Diremos que el evento A se realiza si el resultado del experimento pertenece a A.

Ejemplo

En el ejemplo anterior (se tira un dado), si sale el 5 entonces el evento B se ha realizado, pero también el C. En cambio A no se ha realizado.

Daremos a continuación otros ejemplos de espacios muestrales y eventos.

Ejemplo

Se tiran dos dados indistinguibles y se observa el resultado. Un espacio muestral adecuado puede ser el siguiente:

$$\Omega = \{(i,j) \in \{1,2,3,4,5,6\}^2 \ : \ j \geq i\}.$$

¿Cómo se interpreta el evento $A = \{(5,6)\}$?
En este ejemplo Ω tiene 21 elementos.

Ejemplo

Se tiran dos dados, uno blanco y uno negro y se observa el resultado. Ahora los dados son distinguibles. Un espacio muestral adecuado puede ser el siguiente:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2.$$

¿Cómo se interpreta el evento $A = \{(5, 6)\}$?
El número de elementos de Ω es 36.
El evento $B = \{$ la suma de las caras superiores es mayor que 10$\}$ se escribe por enumeración de la siguiente manera:

$$B = \{(5, 6), (6, 6), (6, 5)\}$$

Observación

La forma de describir los espacios muestrales es importante y debe tenerse en cuenta.

Dado un experimento $(\mathcal{E}, \Omega)$, nuestra intención es asignar medidas de posibilidad, que llamaremos *probabilidades*, a cada uno de los elementos de $\mathcal{P}(\Omega)$. Sin embargo, cuando esta familia de conjuntos "es muy grande" no existe un sistema de tales medidas con propiedades "razonables" y, por lo tanto, nos limitaremos a considerar una subfamilia de $\mathcal{P}(\Omega)$.

Ejemplo

Se mide la altura de una persona. Un espacio muestral puede ser $\Omega = \mathbb{R}_+$.También podríamos elegir como espacio muestral a $\Omega_1 = \mathbb{R}$. En este caso, sin embargo, deberíamos asignar un valor de cero a la posibilidad de tener altura negativa.

Definición

Sea $(\mathcal{E}, \Omega)$ un experimento. Una familia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ es una familia de eventos admisibles si satisface:

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$,

(ii) Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A^c \in \mathcal{A}$,

(iii) Si A_1, $A_2 \in \mathcal{A}$, entonces $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$.

Observación

Se pueden definir más de una familia de eventos admisibles para un mismo experimento $(\mathcal{E}, \Omega)$. Por ejemplo, tanto $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ como $\mathcal{A}_2 = \mathcal{P}(\Omega)$ son siempre admisibles.

Teorema

Sea $(\mathcal{E}, \Omega)$ un experimento con una familia de eventos admisibles $\mathcal{A}$. Entonces:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

(ii) Si $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, entonces $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$.

(iii) Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ entonces:

- a) $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{A}$, y
- b) $A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \mathcal{A}$.

A veces, en lugar de trabajar con una familia de eventos admisibles, se trabaja con la siguiente noción relacionada:

Definición

Sea $(\mathcal{E}, \Omega)$ un experimento. Una familia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ es una σ-álgebra de eventos si satisface:

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$,

(ii) Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A^c \in \mathcal{A}$,

(iii)' Si $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{A}$, entonces $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Ejercicio

Sea $(\mathcal{E}, \Omega)$ un experimento con una σ-álgebra de eventos $\mathcal{A}$.

(i) Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, entonces:

   a) $\cup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$,
   b) $\cap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$.

(ii) Si $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{A}$, entonces $\cap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.