# Probabilidad y Estadística

Agustín G. Bonifacio

UNSL

Distribución Normal

## Distribución Normal

La v.a. $X$ tiene una distribución normal con parámetros $(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, si $X$ admite una función de densidad dada por

$$f_X(r) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

para todo $r \in \mathbb{R}$. Para resumir, escribimos $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.
Una variable aleatoria $Z$ distribuida normalmente con parámetros $(0, 1)$ se denomina estandarizada o tipificada. En este caso, su función de densidad adquiere la forma particular

$$f_Z(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{2}}$$

para todo $r \in \mathbb{R}$.

## Lema

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{2\pi}.$$

## Teorema

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dt = 1$$

para todo $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$.

## Observación

Tradicionalmente, la función de distribución de la normal tipificada (con parámetros $(0,1)$) se denota con $\Phi$. Entonces, si $Z \sim N(0,1)$,

$$P(a \leq Z \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds = \Phi(b) - \Phi(a)$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

- Un problema que se presenta es que la función $\Phi$ no puede obtenerse explícitamente.
- La solución que se ha dado a este problema ha sido tabular $\Phi$ para distintos valores de $r \geq 0$.

**Lema**

Para todo $r > 0$,
$$\Phi(-r) = 1 - \Phi(r).$$

## Ejemplo

Sea $Z \sim N(0,1)$. Calcular:

1. $P([0 \leq Z \leq 1,5])$,
2. $P([-1,5 \leq Z \leq 0])$,
3. $P([-1,5 \leq Z \leq 1,5])$
4. $P([-1,5 \leq Z \leq -0,52])$

### Teorema

Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Entonces,

(i) $F_X(r) = \Phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right)$,

(ii) $P([a \leq X \leq b]) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$.

### Ejemplo

La duración de un embarazo (en días) puede modelarse con una v.a. $X \sim N(270, 100)$. ¿Cuál es la probabilidad de que el embarazo haya durado más 290 días o menos de 240?

- Recordemos que si $S_n$ cuenta el número de éxitos en cada realización de una sucesión de Bernoulli de longitud $n$ con parámetro $p$, entonces $S_n \sim \text{Bin}(n, p)$.

### Teorema de DeMoivre-Laplace

Sea $S_n$ la v.a. que cuenta el número de éxitos en cada realización de una sucesión de Bernoulli de longitud $n$ con parámetro $p$. Entonces, para todo $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$,

$$P\left(\left[a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right]\right) \approx \Phi(b) - \Phi(a)$$

con tal de que $n$ sea suficientemente grande. (Aquí $\Phi$ denota la función de distribución de la normal estandarizada).

## Observación

La aproximación asegurada por el Teorema es bastante buena para valores de $n$ tales que $np(1-p) \geq 10$.

## Ejemplo

Para un grupo de 100 personas, se decide que una cierta dieta es 'buena' si el 65 % de los pacientes sometidos a ella reducen el nivel de colesterol. ¿Cuál es la chance de que la dieta sea aceptada como buena aún cuando no afecte el nivel de colesterol?