Probabilidad y Estadística

Agustín G. Bonifacio

UNSL

Variables Aleatorias Continuas

- Recordemos que si X es una v.a. definida sobre un e.p. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ siempre podemos calcular su función de distribución F_X a través de la fórmula

$$F_X(r) = P([X \leq r])$$

para todo $r \in \mathbb{R}$.
Las v.a. continuas se caracterizan por una fórmula de representación para F_X.

Definición

Una v.a. X se dice continua si existe una función no negativa $f_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F_X(r) = \int_{-\infty}^{r} f_X(t)dt$$

para todo $r \in \mathbb{R}$. Una tal función f_X recibe el nombre de función de densidad para X.

Teorema

Si f_X es una función de densidad para la v.a. X, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)dt = 1$$

Teorema

Si X es una v.a. continua, entonces F_X es una función continua para todo $r \in \mathbb{R}$.

Observaciones

- Que X sea una v.a. continua *no* implica que la función de densidad sea continua.
- El Teorema anterior establece una diferencia importante entre las funciones de distribución de una v.a. continua y una v.a. discreta. Recordemos que, típicamente, las funciones de distribución de las v.a. discretas son funciones escalonadas.

Corolario

Si X es una v.a. continua, entonces

$$P([X = r]) = 0$$

para todo $r \in \mathbb{R}$.

Observación

Este resultado marca también una diferencia con las v.a. discretas, puesto que para éstas últimas $P([X = r]) \neq 0$ por lo menos para un $r \in RgX$.

Teorema

Si X es una v.a. continua con función de densidad f_X, entonces

$$P([a < X \leq b]) = P([a \leq X < b]) = P([a \leq X \leq b]) =$$

$$= P([a < X < b]) = \int_a^b f_X(t)dt$$

Teorema

Si X es una v.a. continua con función de distribución F_X y función de densidad f_X, entonces

$$f_X(r) = \left.\frac{dF_X}{dt}\right|_{t=r}$$

en todo $r \in \mathbb{R}$ donde F_X sea derivable.

Observación

Para completar la analogía entre función de densidad continua y función de densidad discreta, notemos que

$$P([r-\delta \leq X \leq r+\delta]) \approx f_X(r)2\delta.$$

Distribución uniforme en $[a, b]$

La v.a. X tiene una distribución uniforme en $[a, b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, si X admite una función de densidad dada por

$$f_X(r) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{si } \ a \leq r \leq b \\ 0 & \text{o.c.} \end{cases}$$

Para resumir, escribimos $X \sim \text{Unif}[a, b]$.

Ejercicio

Graficar f_X y calcular y graficar F_X.

Observación

La distribución uniforme en $[a, b]$ tiene la importante propiedad de que la probabilidad de que X tome valores en un intervalo $[r_1, r_2] \subseteq [a, b]$ depende solamente de la longitud $r_2 - r_1$. En efecto,

$$P([r_1 \leq X \leq r_2]) = \frac{r_2 - r_1}{b - a}.$$

Distribución Exponencial

La v.a. X tiene una distribución exponencial con parámetro $\lambda > 0$ si X admite una función de densidad dada por

$$f_X(r) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda r} & \text{si} \quad r \geq 0 \\ 0 & \text{o.c.} \end{cases}$$

Para resumir, escribimos $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Observaciones

1. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)dt = 1.$
2. $F_X(r) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda r} & \text{si} \quad r \geq 0 \\ 0 & \text{o.c.} \end{cases}$
3. Dibujar gráfica.

Ejemplo

Supongamos que la longitud de una llamada (en minutos) puede ser modelada por una v.a. distribuída exponencialmente con parámetro $\lambda = 1/10$. Si Ud. llega a un teléfono inmediatamente después de otra persona, ¿cuál es la chance de que deba esperar

1. más de 10 minutos?
2. entre 10 y 20 minutos?

Relación entre las distribuciones Poisson y Exponencial

Ilustraremos, a través de un ejemplo, que si el número de ocurrencias de un hecho se distribuyen Poisson con parámetro λ, entonces la distribución del tiempo hasta que el hecho ocurra se distribuye exponencialmente con el mismo parámetro.
Supongamos que Y modela el número de llamadas por minuto que llegan a una central telefónica. Asumamos $Y \sim \text{Poiss}(1,5)$. Entonces, la probabilidad de que ocurran exactamente r llamadas en t minutos viene dada por

$$P([N(t) = r]) = \frac{(1,5t)^r}{r!} e^{-1,5t}.$$

Si denotamos por X la v.a. que mide el tiempo (a partir de un origen 0) hasta que entra la primera llamada, entonces

$$P([X > t]) = P([N(t) = 0]).$$

Pero $P([N(t) = 0]) = e^{-1,5t}$ de donde
$F_X(t) = P([X \leq t]) = 1 - P([X > t]) = 1 - e^{-1,5t}$.

Pérdida de Memoria

Definición

La v.a. X tiene la propiedad de pérdida de memoria si vale, para todo $s, r > 0$

$$P([X > s + t] | [X > t]) = P([X > s])$$

Observación

Las v.a. exponenciales tienen la propiedad de pérdida de la memoria