Probabilidad y Estadística

Agustín G. Bonifacio

UNSL

Variables Aleatorias Discretas

Definición

Una v.a. X definida sobre un e.p. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se dice discreta si RgX es finito o infinito numerable.

Ejemplo

Consideremos el experimento de tirar una moneda n veces. Sea la v.a. X la que 'da el número de caras que aparecen en cada realización del experimento'. Es claro que $RgX = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Ejemplo

Consideremos el experimento de tirar una moneda una sucesión infinita de veces. Sea la v.a. Y la que 'da el número de la repetición en la que aparece la primera cara'. Es claro que $RgY = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$.

Definición

Sea X una v.a. discreta definida sobre un e.p. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. La función $f_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_X(r) = P([X = r])$$

recibe el nombre de función de densidad discreta para X.

Teorema (de equivalencia)

Sea X una v.a. discreta definida sobre un e.p. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ con función de distribución F_X y función de densidad f_X. Entonces:

(i) La función de densidad f_X se puede obtener a través de la fórmula

$$f_X(r) = F_X(r) - F_X(r^-)$$

para todo $r \in \mathbb{R}$.

(ii) La función de distribución F_X puede ser calculada a través de la fórmula

$$F_X(r) = \sum_{\{r_i \in RgX \ : \ r_i \leq r\}} f_X(r_i)$$

para todo $r \in \mathbb{R}$.

Corolario

Sea X es una v.a. discreta tal que los puntos en RgX pueden ordenarse en forma creciente, esto es, $r_i < r_{i+1}$ para todo $r_i, r_{i+1} \in RgX$. Entonces, F_X es una función escalonada con saltos en los puntos $r_i \in RgX$. El valor del salto coincide con $f_X(r_i)$ para cada $r_i \in RgX$.

Corolario

Si f_X es la función de densidad de una v.a. discreta X, entonces

(i) $f_X(r) \geq 0$,

(ii) $\sum_{r_i \in RgX} f_X(r_i) = \sum_{r_i \in \text{sop} f_X} f_X(r_i) = 1$.

Observación

Una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con soporte discreto que satisfaga (i) y (ii) del último Corolario siempre puede ser vista como función de densidad de una v.a. X. Para ver esto, definamos $\Omega = \operatorname{sop} f$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ y P como la (única) distribución de probabilidad generada por la función $\tilde{p} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{p}(r_i) = f(r_i).$$

Es fácil verificar que la v.a. $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$X(r_i) = r_i$$

cumple que $f_X = f$.

Distribución Discreta Uniforme

La v.a. X tiene una distribución discreta uniforme con parámetro $n \geq 1$ si

$$RgX = \{1, 2, \ldots, n\}$$

y su función de densidad f_X viene dada por

$$f_X(r) = \begin{cases} 1/n & \text{si} \quad r = 1, 2, \ldots, n \\ 0 & \text{o.c.} \end{cases}$$

Para resumir, escribimos $X \sim \text{Unif}(n)$.

Ejemplo

Una v.a. que 'nombre el resultado en la cara superior' al arrojar un dado balanceado. En general, para cualquier espacio equiprobable de tamaño n, si X es la v.a. que enumera los resultados de 1 a n, entonces X tiene esta distribución.

Distribución Binomial

La v.a. X tiene una distribución binomial con parámetros $(n, p), 0 \leq p \leq 1$, si

$$RgX = \{0, 1, \ldots, n\}$$

y su función de densidad f_X viene dada por

$$f_X(r) = \begin{cases} \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} & \text{si} \quad r = 0, 1, \ldots, n \\ 0 & \text{o.c.} \end{cases}$$

Para resumir, escribimos $X \sim \text{Bin}(n, p)$.

Observación

Las v.a. distribuidas binomialmente aparecen frecuentemente en conexión con una clase especial de experimentos que se denominan *sucesiones de Bernoulli.*

Sucesiones de Bernoulli

Un experimento $\mathcal{E}$ modelado a través de un e.p. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ donde $\Omega = \{E, F\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, $P(\{E\}) = p$ y $p(\{F\}) = 1 - p$ se denomina experimento de Bernoulli con parámetro p.
Asociados se encuentran los experimentos repetidos $\mathcal{E}^N$ y $\mathcal{E}^\infty$ con espacios muestrales

$$\Omega^N = \{(S_1, \ldots, S_n) : S_i \in \Omega, i = 1, \ldots, n\},$$

$$\Omega^\infty = \{(S_1, \ldots, S_n, \ldots) : S_i \in \Omega, i = 1, \ldots, n, \ldots\}.$$

Notemos que $\Omega^N = \prod_{i=1}^n \Omega$ y $\Omega^\infty = \prod_{i=1}^\infty \Omega$.
¿Podremos definir distribuciones de probabilidad 'naturales' P^N y P^∞?

Ejemplo

Una máquina elabora el 5 % de las piezas de manera defectuosa. La producción es empaquetada en bolsas de 10 unidades que son llenadas con piezas elegidas al azar. ¿Cuál es la chance de que en una bolsa elegida al azar se encuentren tres piezas falladas?

Distribución Geométrica

La v.a. X tiene una distribución geométrica con parámetro $p, 0 < p \leq 1$, si

$$RgX = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$$

y su función de densidad f_X viene dada por

$$f_X(r) = \begin{cases} p(1-p)^{r-1} & \text{si} \quad r = 1, \ldots, n, \ldots \\ 0 & \text{o.c.} \end{cases}$$

Para resumir, escribimos $X \sim \text{Geom}(p)$.

Observación

Las v.a. distribuidas geométricamente aparecen frecuentemente en conexión con sucesiones de Bernoulli de longitud infinita.

Distribución de Poisson

La v.a. X tiene una distribución de Poisson con parámetro $\lambda > 0$ si

$$RgX = \{0, 1, \ldots, n, \ldots\}$$

y su función de densidad f_X viene dada por

$$f_X(r) = \begin{cases} \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda} & \text{si} \;\; r = 0, 1, \ldots, n, \ldots \\ 0 & \text{o.c.} \end{cases}$$

Para resumir, escribimos $X \sim \text{Poiss}(\lambda)$.

Observación

Una v.a. distribuidas Poisson con parámetro $\lambda = np$ puede utilizarse como una 'buena' aproximación de una v.a. con distribución binomial con parámetros (n, p) (siempre que n sea grande, p pequeño y np moderado)

Ejemplo

Supongamos que la probabilidad de que un ítem producido por una máquina sea defectuoso es de 0,05. Encontrar la probabilidad de que en un paquete de 50 existan a lo más 5 ítems defectuosos.

- Otro uso de las v.a. con distribución Poisson es para modelar situaciones en donde ciertos hechos tienen ocurrencia en el tiempo.
- Bajo ciertas condiciones, la v.a. que cuenta el número de eventos que ocurren en cualquier intervalo de tiempo de longitud t tiene una distribución de Poisson de parámetro λt, esto es,
  $P(\{\text{ocurran } r \text{ eventos en } [\alpha, \alpha + t]\}) = \frac{(\lambda t)^r}{r!} e^{-\lambda t}$
  para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$.

- El valor de λ, que puede demostrarse que coincide con la tasa de ocurrencia de eventos por unidad de tiempo, es una constante que debe ser determinada empíricamente.

Ejemplo

Supongamos que los temblores en una región ocurren a un promedio de dos por semana. Queremos encontrar la probabilidad de que ocurran al menos tres temblores en las próximas dos semanas.