# Probabilidad y Estadística

Agustín G. Bonifacio

UNSL

Probabilidad Total, Fórmula de Bayes e Independencia Estocástica

- Una probabilidad condicional sólo puede definirse si se parte de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Tiene sentido investigar relaciones entre las probabilidades *totales* (las dadas por $P$) y las probabilidades *condicionales*.

**Teorema (de la Probabilidad Total)**

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $B_1, \ldots, B_m$ una colección de $m$ eventos en $\mathcal{A}$ que satisface:

(i) $B_i \cap B_j = \emptyset$ para todo $i, j = 1, \ldots m$ con $i \neq j$,

(ii) $\cup_{i=1}^{m} B_i = \Omega$,

(iii) $P(B_i) > 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$

entonces, para todo $A \in \mathcal{A}$,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{m} P(A|B_i)P(B_i).$$

## Corolario

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $B \in \mathcal{A}$ tal que $0 < P(B) < 1$. Entonces, para todo $A \in \mathcal{A}$,

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c).$$

demostración: ejercicio. $\square$

## Observación

El Teorema sigue siendo válido aún si se considera una sucesión infinita de eventos $B_i$.

## Ejemplo

Hay 3 urnas numeradas del 1 al 3. Cada una tiene 10 bolillas, numeradas del 1 al 10. La urna 1 tiene la bolilla 1 defectuosa, la urna 2 tiene las bolillas 1 y 2 defectuosas y la urna 3 tiene las bolillas 1, 2 y 3 defectuosas. La experiencia consiste en en seleccionar una urna al azar y entonces, de esa urna seleccionada, elegir una bolilla. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bolilla defectuosa?

### Teorema (Fórmula de Bayes)

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Si $B_1, \ldots, B_n$ es una familia de eventos en $\mathcal{A}$ tal que:

(i) $B_i \cap B_j = \emptyset$ para todo $i, j = 1, \ldots n$ con $i \neq j$,

(ii) $\cup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$,

(iii) $P(B_i) > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$

entonces, para todo evento $A \in \mathcal{A}$ tal que $P(A) > 0$,

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$$

para todo $k = 1, \ldots, n$.

## Corolario

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Sean $A, B \in \mathcal{A}$ tal que $P(A) > 0$ y $0 < P(B) < 1$. Entonces,

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)}$$

## Ejemplo

Hay 3 urnas numeradas del 1 al 3. Cada una tiene 10 bolillas, numeradas del 1 al 10. La urna 1 tiene la bolilla 1 defectuosa, la urna 2 tiene las bolillas 1 y 2 defectuosas y la urna 3 tiene las bolillas 1, 2 y 3 defectuosas. La experiencia consiste en en seleccionar una urna al azar y entonces, de esa urna seleccionada, elegir una bolilla. ¿Cuál es la probabilidad de que una bolilla defectuosa haya sido extraída de la urna 3?

## Teorema (Regla Multiplicativa)

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Sean $A_1, \ldots, A_n$ eventos en $\mathcal{A}$ para los cuales

$$P(\cap_{i=1}^{n-1} A_i) > 0.$$

Entonces

$$P(\cap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n| \cap_{i=1}^{n-1} A_i).$$

## Ejemplo

Una urna contiene 10 bolillas, 3 negras y 7 blancas. Se juega el siguiente juego por etapas. En cada etapa se extrae una bolilla al azar. se anota su color y se vuelve a introducir a la urna junto con dos bolillas más del mismo color. ¿Cuál es la probabilidad que una bolilla negra sea extraída en cada una de las tres primeras extracciones (etapas)?

- Para algunos pares de eventos, el hecho de conocer que uno de ellos ha ocurrido no modifica el valor de la probabilidad (condicionada a él) del otro, esto es, la ocurrencia del evento $B$ no ofrece nueva información respecto de la ocurrencia del evento $A$.

**Definición**

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Dos eventos $A, B \in \mathcal{A}$ se dicen (estocásticamente) independientes si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

## Teorema

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y supongamos que $A, B \in \mathcal{A}$ son tales que $P(A) > 0$ y $P(B) > 0$. Entonces $A$ y $B$ son independientes si y sólo si $P(A|B) = P(A)$ ó $P(B|A) = P(B)$.

## Ejemplo

Se arrojan dos dados distinguibles (uno blanco y el otro negro). Sean:

$A = \{$la suma de los resultados es impar$\}$,
$B = \{$sale 1 en el dado negro$\}$,
$C = \{$la suma de los resultados es 7$\}$.

¿Son $A$ y $B$ independendientes? ¿Cómo son $A$ y $C$? ¿Cómo son $B$ y $C$?

### Teorema

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Sean $A$ y $B$ eventos en $\mathcal{A}$ mutuamente excluyentes. $A$ y $B$ son mutuamente excluyentes si y sólo si $P(A) = 0$ ó $P(B) = 0$.

### Teorema

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Si $A$ y $B$ son eventos en $\mathcal{A}$ independientes, entonces:

(i) $A$ y $B^c$ son independientes,

(ii) $A^c$ y $B$ son independientes,

(iii) $A^c$ y $B^c$ son independientes.

- La noción de independencia puede extenderse a varios eventos.

### Definición

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sean $A_1, \ldots, A_n$ eventos en $\mathcal{A}$. Los eventos $A_1, \ldots, A_n$ se dicen independientes si y sólo si:
$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$ con $i \neq j$,
$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k)$ para todo $i, j, k = 1, \ldots, n$ con $i \neq j \neq k \neq i$,
$\ldots$
$P(\cap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$.

## Observación

Todas las condiciones impuestas en la definición son necesarias. Por ejemplo, $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ no implica en general $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$. ¿Por qué?

## Definición

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sean $A_1, \ldots, A_n$ eventos en $\mathcal{A}$ tales que

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

para $i, j = 1 \ldots, n$ con $i \neq j$. Entonces los eventos $A_1, \ldots, A_n$ se dicen independientes dos a dos.

### Observación

Que una familia de eventos sean independientes dos a dos no implica que la familia sea independiente.

### Observación

Las nociones de *independencia* e *independencia dos a dos* pueden extenderse a sucesiones infinitas de eventos admisibles.

### Observación

Tanto la noción de probabilidad condicional como la de independencia entre dos eventos pueden utilizar para calcular la probabilidad de la intersección.

**Ejemplo**

Se tiene una urna con $m$ bolillas, $k$ negras y $m-k$ blancas. Se hacen dos extracciones, reemplazando la bolilla extraída en la primera etapa. ¿Cuál es la probabilidad de extraer dos bolillas negras? ¿Cuál sería la probabilidad de extraer dos negras si no se repusiera en la primera etapa?