Probabilidad y Estadística

Agustín G. Bonifacio

UNSL

Espacios Finitos, Probabilidad Condicional

- En un espacio de probabilidad finito $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de tamaño N, dar P es equivalente a dar 2^N números $P(A)$, $A \in \mathcal{A}$.
- El siguiente teorema brinda una forma económica de definir distribuciones en espacios finitos (dando N valores en vez de 2^N).

Teorema

Sea $(\mathcal{E}, \Omega, \mathcal{A})$ un experimento con $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ y $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Entonces una función $\tilde{p} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface:

(i) $\tilde{p}(\omega_i) \geq 0$ para cada $i = 1, \ldots, n$.

(ii) $\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}(\omega_i) = 1$

define una única distribución de probabilidad P sobre $\mathcal{A}$ que asigna la probabilidad

$$P(\{\omega_i\}) = \tilde{p}(\omega_i)$$

a cada evento simple $\{\omega_i\}$. Esta distribución de probabilidad está dada por

$$P(A) = \sum_{\{\omega_i \in A\}} \tilde{p}(\omega_i)$$

para cada $A \in \mathcal{A}$. (Se conviene que $\sum_{\{\omega_i \in \emptyset\}} \tilde{p}(\omega_i) = 0$).

Ejemplo

Consideremos el experimento de tirar un dado. Entonces $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ es un espacio muestral adecuado. La función $\tilde{p} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que asigna $\frac{1}{6}$ a cada elemento de Ω satisface las condiciones del Teorema y, claramente, define la distribución de igual probabilidad en $\mathcal{P}(\Omega)$.

Ejemplo

Sea, como antes, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. La función $\tilde{p} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\tilde{p}(1) = \tilde{p}(2) = \tilde{p}(3) = \tilde{p}(4) = 0$, $\tilde{p}(5) = \frac{1}{3}$ y $\tilde{p}(6) = \frac{2}{3}$ también define una distribución de probabilidad en $\mathcal{P}(\Omega)$.

Observación

El último ejemplo muestra que pueden existir eventos $B \neq \emptyset$ tales que $P(B) = 0$.

- En situaciones prácticas pueden darse situaciones como la siguiente: algunas cosas han sucedido, entonces ¿cuál es la chance de que alguna otra cosa suceda?

Definición

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Consideremos dos eventos $A, B \in \mathcal{A}$. La probabilidad condicional de A dado B, que denotamos por $P(A|B)$ se define por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B}{P(B)}$$

si $P(B) > 0$. $P(A|B)$ no está definida si $P(B) = 0$.

Observación

Dado $B \in \mathcal{A}$, la noción de chance involucrada en $P(A|B)$ es *distinta* de la probabilidad $P(A)$ definida con respecto al modelo $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Ejemplo

Se apuesta a que sale un 2 al arrojar un dado. Antes de apostar, alguien 'sopla' que ha salido un número par. ¿Modifica esta información la percepción del problema? Supongamos que el dado es balanceado y que el modelo probabilístico adecuado es $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ donde $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \mathcal{P}(\Omega)$ y P es la distribución de igual probabilidad. Entonces $P(\{2\}) = \frac{1}{6}$ pero, si $B = \{\text{sale par}\} = \{2, 4, 6\}$, se tiene que

$$P(\{2\}|B) = \frac{P(\{2\} \cap \{2,4,6\})}{P(\{2,4,6\})} = \frac{P(\{2\})}{P(\{2,4,6\})} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}.$$

¿Qué pasaría si se sabe que salió número impar?

Observación

La probabilidad condicional es, en cierto sentido, más confiable o está más ajustada a la información disponible.

- En general, $P(A|B) \neq P(B|A)$. Sin embargo vale el siguiente resultado:

Teorema

Si $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ es un espacio de probabilidad y $A, B \in \mathcal{A}$ son tales que $P(A) > 0$ y $P(B) > 0$, entonces

$$P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A).$$

- Supongamos que en un modelo $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ podemos asumir que un evento B con $P(B) > 0$ se ha realizado.
- Tiene sentido entonces 'actualizar' las medidas de posibilidad asignadas en virtud de esta información. Parece razonable asignarle a cada evento A no ya $P(A)$ sino $P(A|B)$.
- Pero, ¿será la función $P(\,\cdot\,|B)$ una distribución de probabilidad?

Teorema

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y $B \in \mathcal{A}$ tal que $P(B) > 0$. Entonces, la función $P(\,\cdot\,|B) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ que asigna $P(A|B)$ a cada $A \in \mathcal{A}$ es una distribución de probabilidad sobre $\mathcal{A}$.

- Consideremos una muestra de tamaño N extraída del experimento $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Ya sabemos que $P(B) \approx f^N(B) = \frac{F^N(B)}{N}$ y $P(A \cap B) \approx f^N(A \cap B) = \frac{F^N(A \cap B)}{N}$.
- Utilizando estas relaciones podemos establecer las siguientes:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \approx \frac{F^N(A \cap B)/N}{F^N(B)/N} = \frac{F^N(A \cap B)}{F^N(B)}.$$

- Si el fenómeno de regularidad estadística está presente, la probabilidad condicional de un evento A dado otro evento B representa, aproximadamente, la proporción de ocurrencias del evento A cuando ocurre el evento B, al considerar una muestra de tamaño N.

- En particular, si $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ es un espacio donde P es la distribución de igual probabilidad, entonces:

$$P(A \mid B) = \frac{A \cap B}{P(B)} = \frac{N_{A \cap B}/N}{N_B/N} = \frac{N_{A \cap B}}{N_B}.$$

Ejemplo

Se tira una moneda balanceada dos veces.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado sean dos caras?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado sean dos caras sabiendo que la primera tirada ha sido cara?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado sean dos caras sabiendo que al menos en una tirada ha salido cara?