Probabilidad y Estadística

Agustín G. Bonifacio

UNSL

Probabilidad *A Priori* y Probabilidad *A Posteriori*

Habemus Página!!!

probabilidadyestadisticaunsl.weebly.com

Introducción

- Ya hemos visto cómo definir una distribución de probabilidad sobre una familia de eventos. Sin embargo, carecemos todavía de un método que nos permita establecer, para un experimento concreto, una distribución de probabilidad razonable, esto es, que refleje el comportamiento de los resultados del experimento.
- Presentaremos dos métodos para determinar una distribución de probabilidad:
    1. La noción de probabilidad 'a priori' o clásica,
    2. La noción de probabilidad 'a posteriori' o frecuencial.

- Consideremos el experimento de lanzar una moneda.
- Queremos, en función de razonamientos plausibles, establecer una distribución de probabilidad.
- Como no tenemos ninguna razón para suponer que la moneda no está balanceada podemos esperar que existe la misma posibilidad de que salga cara o cruz.
- En este proceso de asignación de probabilidades *no hemos realizado ninguna experiencia*.

Definición

Si un experimento aleatorio $(\mathcal{E}, \Omega, \mathcal{A})$ tiene un espacio muestral Ω con N eventos simples igualmente posibles y si un evento $A \in \mathcal{A}$ se puede realizar a través de N_A de aquellos eventos simples, entonces la distribución de probabilidad clásica P asigna a cada evento $A \in \mathcal{A}$ el valor

$$P(A) = \frac{N_A}{N}.$$

A esta distribución también le llamamos distribución de igual probabilidad.

Ejemplo

Confirmemos que en el caso de lanzar una moneda la probabilidad asignada se corresponde con la definición clásica.
$\Omega = \{C, X\}$, $N = |\Omega| = 2$
Si $A = \emptyset$, $N_A = 0$, luego $P(A) = 0$,
Si $A = \Omega$, $N_A = 2$, luego $P(A) = 1$,
Si $A = \{C\}$, $N_A = 1$, luego $P(A) = \frac{1}{2}$,
Si $A = \{X\}$, $N_A = 1$, luego $P(A) = \frac{1}{2}$.

Ejemplo

Confirmar que la probabilidad asignada se corresponde con la clásica en el experimento de arrojar un dado.

Ejemplo

Tenemos un mazo de cartas españolas (40 cartas, sin ochos ni nueves). ¿Cuál es la probabilidad de sacar un oro? ¿Cuál es la probabilidad de sacar un as?

Observación

No siempre que estemos en presencia de un espacio muestral finito la asignación de probabilidades a través del método clásico aplica. Por ejemplo, si arrojamos dos monedas indistinguibles, un espacio muestral adecuado es

$$\Omega = \{(C, X), (C, C), (X, X)\},$$

que no es equiprobable. ¿Por qué?

Observación

Cuando $|\Omega|$ es grande, el proceso de contar para calcular N_A para un cierto evento A puede ser complejo.

Observación

La distribución de igual probabilidad aplica cuando no se tienen razones intuitivas para dudar de la igual posibilidad de todos los resultados posibles.

- El método de asignación de probabilidades que presentamos ahora se basa en la utilización información que se obtiene a través de cierta experiencia con el modelo.
- Este método da origen a otra interpretación de las probabilidades conocida como *interpretación frecuencial* o probabilidades *a posteriori*.
- Consideremos el experimento de la moneda. Queremos proponer un modelo $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Nos hemos convencido de que $\Omega = \{C, X\}$ y de que $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Queremos determinar P.
- Supongamos que hemos arrojado la moneda 100 veces y hemos observado los resultados. Podemos construir una tabla de frecuencias relativas:

Resultado	Frec. Observada	Frec. Relativa	Prob. (Clásica)
C	4	0,04	0,5
X	96	0,96	0,5
Total	100	1	1

- La cuestión ahora es cómo asignar probabilidades a los eventos $\{C\}$ y $\{X\}$
- La probabilidad de un evento *puede asimilarse con la frecuencia relativa esperada de aparición del evento cuando se realiza una muestra de tamaño N.*
- Para el ejemplo de la tabla, sería razonable definir $P(\{C\}) = 0,04$ y $P(\{X\}) = 0,96$.
- Pero, ¿qué sucederá si tomamos otra muestra de diferente tamaño y aplicamos la misma técnica? En general, es un hecho experimental que la nueva distribución de probabilidades que obtendríamos va a ser similar a la que generamos a través de la primera muestra. Este fenómeno es conocido como *regularidad estadística.*

Definición

Consideremos un experimento $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ y un evento $A \in \mathcal{A}$. Si se toma una muestra de tamaño N del experimento, el número de veces que se realizó el evento A en la muestra se denomina la frecuencia de aparición de A, y la denotamos por $F(A)$. El cociente $\frac{F(A)}{N}$ se denomina frecuencia relativa de aparición de A, y se denota por $f(A)$.

Fenómeno de Regularidad Estadística

Consideremos un evento particular $A \in \mathcal{A}$. Tomemos una sucesión de muestras crecientes $N_1 < N_2 < \ldots < N_r < \ldots$. Es un hecho experimental observado que los correspondientes valores

$$f_1(A), f_2(A), \ldots, f_r(A), \ldots$$

tienden a agruparse cuando r crece.

Interpretación Frecuencial de las Probabilidades

Los pasos a seguir para proponer distribuciones de probabilidad se basan en el fenómeno de regularidad estadística y pueden describirse como sigue. Dado $(\Omega, \mathcal{A})$:

1. Se fija un tamaño de muestra N,
2. Se toma una muestra de tamaño N,
3. Se calcula la frecuencia relativa $f(A)$ de cada evento $A \in \mathcal{A}$.
4. Se *define* la distribución de probabilidad $P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$P(A) = f(A)$$

   para cada $A \in \mathcal{A}$.
5. Se propone el modelo $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Ejemplo

Se conoce que la probabilidad de que la altura de un hombre elegido al azar en San Luis esté entre 1,75 y 1,80 metros es de 0,32. Si se seleccionaron 20 individuos al azar en esa provincia, ¿cuántos de ellos se debe esperar que tengan una altura comprendida entre aquellos dos valores?