Probabilidad y Estadística

Agustín G. Bonifacio

UNSL

Distribuciones de Probabilidad

Habemus Página!!!

probabilidadyestadisticaunsl.weebly.com

Distribuciones de Probabilidad

La siguiente definición establece las propiedades "razonables" que debería satisfacer un conjunto de números para poder ser usado como un sistema de medidas de posibilidad. Las *probabilidades* se referirán siempre a eventos asociados con un espacio muestral.

Definición

Sea $(\mathcal{E}, \Omega, \mathcal{A})$ un experimento. Una distribución de probabilidad P sobre $\mathcal{A}$ es una función

$$P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$$

que satisface:

(i) $P(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{A}$,

(ii) $P(\Omega) = 1$,

(iii) Si $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ es una sucesión de eventos que satisface:

  (a) $A_i \in \mathcal{A}$ para todo $i \in \mathbb{N}$,
  (b) $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$,
  (c) $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo par $i, j \in \mathbb{N}$ con $i \neq j$,

  entonces:

$$P\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Observaciones

- La condición (iii)(b) no es necesaria si $\mathcal{A}$ es una $\sigma-$álgebra.
- $P(A)$ se lee "la probabilidad del evento A".
- Una distribución de probabilidad es una *función* mientras que la probabilidad de un evento es un *número* (entre 0 y 1).

Definición

Sea $(\mathcal{E}, \Omega, \mathcal{A})$ un experimento y P una distribución de probabilidad sobre $\mathcal{A}$. El sistema $(\mathcal{E}, \Omega, \mathcal{A}, P)$ se denomina espacio de probabilidad (e.p.). En general, usaremos simplemente la notación $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ para identificar un e.p.

Ejemplo

Consideremos el experimento $(\mathcal{E}, \Omega, \mathcal{A})$ donde $\Omega = \{C, S\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Podemos interpretarlo como la tirada de una moneda. Consideremos la función $P_1 : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $P_1(\emptyset) = 0$, $P_1(\{C\}) = P_1(\{S\}) = \frac{1}{2}$ y $P_1(\Omega) = 1$. Verifiquemos que P_1 es una distribución de probabilidad.

Ejemplo

Consideremos el experimento $(\mathcal{E}, \Omega, \mathcal{A})$ donde $\Omega = \{C, S\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Consideremos la función $P_2 : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $P_2(\emptyset) = 0$, $P_2(\{C\}) = \frac{1}{4}, P_2(\{S\}) = \frac{3}{4}$ y $P_2(\Omega) = 1$. Verifiquemos que P_2 es una distribución de probabilidad.

Propiedades

Teorema

Sea $(\mathcal{E}, \Omega, \mathcal{A}, P)$ un e.p. Entonces:

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. Si $A_1, \ldots, A_n$ satisfacen
   (a) $A_i \in \mathcal{A}$ para $i = 1, \ldots, n$,
   (b) $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$ con $i \neq j$

   entonces $P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.
3. Si $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ y $A_1 \cap A_2 = \emptyset$,
$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2).$$
4. $P(A^c) = 1 - P(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$.
5. Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $0 \leq P(A) \leq 1$.

6. Si $A, B \in \mathcal{A}$,
$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c),$$
$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$
7. Si $A, B \in \mathcal{A}$,
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$
8. Si $A, B \in \mathcal{A}$ y $A \subseteq B$,
$$P(A) \leq P(B).$$

Observación

Notemos que (7) no se contradice con (3).