Probabilidad y Estadística

Agustín G. Bonifacio

UNSL

Varias Variables Aleatorias: Distribución Conjunta e Independencia

- Consideremos un e.p. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ y dos v.a. X e Y definidas sobre él.
- Ejemplo: supongamos que se selecciona a un individuo al azar (de un grupo dado) y X mide su altura y Y su peso.
- Asociados con X e Y podemos definir los eventos

$$A_{uv} = \{\omega \in \Omega \;:\; X(\omega) \leq u \text{ y } Y(\omega) \leq v\}$$

- A veces escribimos $A_{uv} = [X \leq u, Y \leq v]$.
- Si

$$A_u^X = \{\omega \in \Omega \;:\; X(\omega) \leq u\}$$

y

$$A_v^Y = \{\omega \in \Omega \;:\; Y(\omega) \leq v\},$$

entonces

$$A_{uv} = A_u^X \cap A_v^Y$$

por lo que $A_{uv} \in \mathcal{A}$ para todo $u, v \in \mathbb{R}$.

Definición

Sean X e Y v.a. definidas sobre un e.p. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. La función de distribución conjunta $F_{XY} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ se define por

$$F_{XY}(u, v) = P([X \leq u, Y \leq v]).$$

Observación

Cuando estamos considerando la función de distribución conjunta F_{XY}, las distribuciones de X e Y, F_X y F_Y, reciben el nombre de distribuciones marginales.

- Si se conoce F_{XY} se pueden obtener fácilmente las distribuciones marginales:

Teorema

Sean X e Y v.a. definidas sobre un e.p. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Si F_{XY} es su función de distribución conjunta, entonces:

1. $F_X(u) = \lim_{n \to \infty} F_{XY}(u, n)$
2. $F_Y(v) = \lim_{n \to \infty} F_{XY}(n, v)$

Definición

Sean X e Y v.a. definidas sobre un e.p. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Decimos que X e Y tienen una distribución conjunta discreta si

$$Rg(X,Y) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = (X(\omega), Y(\omega)) \text{ para algún } \omega \in \Omega\}$$

es finito o infinito numerable.

Definición

Sean X e Y v.a. definidas sobre un e.p. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ con una distribución conjunta discreta. La función de densidad conjunta discreta $f_{XY} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ se define por

$$f_{XY}(u,v) = \begin{cases} P([X=u, Y=v]) & \text{si } (u,v) \in Rg(X,Y), \\ 0 & \text{o.c.} \end{cases}$$

Teorema

Sean X e Y v.a. definidas sobre un e.p. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ con una función de densidad conjunta discreta f_{XY}. Entonces:

$$\sum_{(u,v)\in Rg(X,Y)} f_{XY}(u,v) = 1.$$

Ejemplo

Se tiran dos monedas balanceadas distinguibles.

Teorema

Sean X e Y v.a. definidas sobre un e.p. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ con una función de densidad conjunta discreta f_{XY}. Entonces:

1. $f_X(u) = \sum_{(u,v)\in Rg(X,Y)} f_{XY}(u,v)$
2. $f_Y(v) = \sum_{(u,v)\in Rg(X,Y)} f_{XY}(u,v)$.

Definición

Sean X e Y v.a. definidas sobre un e.p. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Entonces X e Y se dicen independientes si los eventos

$$[X \in \mathbb{R}_1], [Y \in \mathbb{R}_2] \in \mathcal{A}$$

son independientes para todo par $\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2$ en una subfamilia 'suficientemente grande' de subconjuntos de $\mathbb{R}$ (σ-álgebra de Borel).

Teorema

Sean X e Y v.a. definidas sobre un e.p. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ con una distribución conjunta F_{XY}. Entonces X e Y son independientes si y sólo si

$$F_{XY}(u, v) = F_X(u) F_Y(v)$$

para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Teorema

Sean X e Y v.a. definidas sobre un e.p. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ con una función de densidad conjunta discreta f_{XY}. Entonces, X e Y son independientes si y sólo si

$$f_{XY}(u, v) = f_X(u) f_Y(v)$$

para todo $(u, v) \in Rg(X, Y)$.

Ejemplo

Si consideramos el lanzamiento de dos monedas balanceadas distinguibles, las v.a. involucradas son independientes.

Ejemplo

Si suponemos una situación similar, pero en la cual la primera moneda no está balanceada, las v.a. involucradas no son independientes.

Ejemplo

Si tiramos dos monedas y la probabilidad de que salga cara para cada una de ellas es de p, ¿cuál es la probabilidad de que en ambas salga cara?¿qué supuestos estamos haciendo?

Definición

Sean X e Y v.a. definidas sobre un e.p. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ con una función de densidad conjunta f_{XY}. La covarianza entre X e Y se define por

$$Cov(X,Y) = \sum_{(u,v)\in \ Rg(X,Y)} [u - E(X)][v - E(Y)]f_{XY}(u,v)$$

en el caso que f_{XY} se discreta y la serie anterior sea absolutamente convergente, y por

$$Cov(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [s - E(X)][t - E(Y)]f_{XY}(s,t)\ dsdt$$

en el caso de que f_{XY} sea continua y la integral anterior sea absolutamente convergente.

Teorema

Sean X e Y dos v.a. independientes definidas sobre un e.p. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Entonces

$$Cov(X, Y) = 0.$$

- $Cov(X, Y) = 0$ *no implica* que X e Y sean independientes.

Ejemplo

Sean X e Y v.a. con f_{XY} dada por

$$f_{XY}(-1, 0) = \frac{1}{3} \qquad f_{XY}(1, 0) = \frac{1}{3} \qquad f_{XY}(0, 1) = \frac{1}{3}$$

y cero en otro caso. Entonces X e Y no son independientes pero $Cov(X, Y) = 0$.

Definición

Sean X e Y v.a. definidas sobre un e.p. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ con una función de densidad conjunta f_{XY}. El coeficiente de correlación entre X e Y se define por

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}.$$

- El *coeficiente de correlación* provee una medida de la dependencia lineal que existe entre las variables aleatorias.
- $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1.$

- Sean X e Y v.a. definidas sobre un e.p. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ con una función de densidad conjunta.
- Si repetimos n veces el experimento asociado con ellas obtenemos una muestra de tamaño n de X e X.
- Esta muestra consiste en n pares ordenados (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$. Esta muestra puede representarse gráficamente en una *nube de puntos.*
- La forma de la nube de puntos está estrechamente vinculada con ρ_{XY} :
    - Si $|\rho_{XY}| = 1$, existe una relación lineal de tipo $Y = aX + b$.
    - Si $\rho_{XY} = 1$, $a > 0$ y si $\rho_{XY} = -1$, $a < 0$.
    - En general, $\rho_{XY} > 0$ implica relación creciente entre las variables, $\rho_{XY} < 0$ implica relación decreciente, y $\rho_{XY} = 0$ indica que no hay relación lineal.