Probabilidad y Estadística
Práctica 4: Espacios de Probabilidad Finitos y Probabilidad Condicional

Ejercicio 1. Dada la siguiente distribución P de probabilidades:

ω_i	1	2	3	4	5	6
$P(\omega_i)$	0,2	0,1	0,4	0,1	0,1	0,1

a) Verificar que define una distribución de probabilidades.
b) Sean los eventos $A_1 = \{\omega_i \in \Omega : 1 \leq \omega_i \leq 4\}$ y $A_2 = \{\omega_i \in \Omega : \omega_i \geq 4\}$. Calcular $P(A_1)$, $P(A_2)$, $P(A_1 \cap A_2)$ y $P(A_1 \cup A_2)$.

Ejercicio 2. Una moneda es arrojada dos veces. Si asumimos que todos los puntos del espacio muestral $\Omega = \{(c,c),(c,s),(s,c),(s,s)\}$ son igualmente probables, ¿cuál es la probabilidad condicional de que ambas resulten caras, dado que la primera lo fue?

Ejercicio 3. Una urna contiene 10 bolillas blancas, 5 amarillas y 10 negras. Una bolilla es elegida al azar y es notado que no es negra. ¿Cuál es la probabilidad de que sea amarilla?

Ejercicio 4. Se arrojan dos dados. Hallar la probabilidad de que por lo menos uno sea 6 dado que cayeron distintos números.

Ejercicio 5. Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ y un evento $B \in \mathcal{A}$ con $P(B) > 0$, muestre que la función $P(\cdot|B) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ que asigna a cada evento A la probabilidad condicional $P(A|B)$ es una distribución de probabilidad.

Ejercicio 6. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $B \in \mathcal{A}$ tal que $0 < P(B) < 1$. Entonces, para todo $A \in \mathcal{A}$:

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c).$$

Ejercicio 7. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sean $A, B \in \mathcal{A}$ tales que $P(A) > 0$ y $0 < P(B) < 1$. Entonces:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)}.$$

Ejercicio 8. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Sean $A_1, \ldots, A_n$ eventos en $\mathcal{A}$ para los cuales $P(\cap_{i=1}^{n-1} A_i) > 0$. Probar que:

$$P(\cap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n| \cap_{i=1}^{n-1} A_i).$$

Ejercicio 9. Se arrojan dos dados distinguibles (uno blanco y otro negro). Sean los eventos: $A = \{\text{sale un 1 en el dado negro}\}$ y $B = \{\text{la suma de los resultados es 7}\}$. Decidir si A y B son independientes.

Ejercicio 10. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sean $A, B \in \mathcal{A}$ eventos independientes. Mostrar que:
a) A y B^c son independientes,
b) A^c y B son independientes,
c) A^c y B^c son independientes.

Ejercicio 11. Construir ejemplos en donde valgan las siguientes igualdades:
a) $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$,
b) $P(A_1 \cap A_2) \neq P(A_1)P(A_2)$.

Ejercicio 12. Se arrojan dos dados distintos. Considere los eventos siguientes: $A_1 = \{$el primer dado sale impar$\}$, $A_2 = \{$el segundo dado sale impar $\}$ y $A_3 = \{$la suma de los dados es impar$\}$.
a) ¿Los eventos A_1, A_2 y A_3 son independientes de a pares?
b) ¿La familia $\{A_1, A_2, A_3\}$ es independiente?

Ejercicio 13. *Dilema del concurso televisivo.* En un concurso de televisión se le ofrece al concursante la posibilidad de elegir una entre 3 puertas A, B, C para quedarse con lo que hay detrás de ella. El presentador le informa que sólo una de ellas tiene un buen regalo (un apartamento lujoso), mientras que las otras dos están vacías. El concursante opta por una y, tras decir por cuál, el presentador (que conoce exactamente dónde está el regalo) le abre una de las otras dos puertas no elegidas por el concursante donde no está el regalo. Luego le ofrece al concursante la opción de cambiar su decisión inicial eligiendo la otra puerta aún no abierta. ¿Qué debe hacer el concursante? Es decir, ¿debe el concursante aceptar la nueva posibilidad cambiando la puerta que eligió originalmente, o no?

Ejercicio 14. ¿Son verdaderas o falsas las siguientes igualdades? Justifique su respuesta.
a) $P(A|B) = P(A^c|B^c)$,
b) $P(A|B) + P(A^c|B^c) = 1$,
c) $P(A|B) + P(A|B^c) = 1$.

Ejercicio 15. Una familia tiene 2 hijos. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean mujeres si la más grande es mujer?

Ejercicio 16. Se tienen $n + 1$ urnas numeradas de 0 a n. Cada urna contiene n bolillas, de las cuales en la i-ésima urna i son blancas y $n - i$ son azules. Se elige una urna al azar y de ella se extrae una bolilla al azar.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bolilla extraída sea blanca?
b) Si se ha extraído una bolilla blanca, ¿cuál es la probabilidad de haberla extraído de la urna i-ésima, con $0 \leq i \leq n$?