Probabilidad y Estadística
Práctica 2: Distribuciones de Probabilidad

Ejercicio 1. Dado un espacio de probabilidad $(\mathcal{E}, \Omega, \mathcal{A}, P)$, sean A y B eventos de $\mathcal{A}$, entonces:
a) Si $P(A) = 0,6$, calcular $P(A^c)$.
b) Si $P(A) = 0,6$ y $P(A \cap B) = 0,4$, calcular $P(A \cap B^c)$.
c) Si $P(A \cap B^c) = 0,3$ y $P(A \cap B) = 0,2$, calcular $P(A)$.

Ejercicio 2. Demostrar que:
$$P(E \cup F \cup G) = P(E) + P(F) + P(G) - P(E \cap F) - P(E \cap G) - P(F \cap G) + P(E \cap F \cap G).$$

Ejercicio 3. Suponga que tenemos una caja con 2 bolillas rojas (R), 3 negras (N)y 5 verdes (V). En cada ensayo se saca una bolilla y se devuelve a la caja. En consecuencia, las probabilidades de extraer una bolilla de un color determinado son: $P(R) = 0,2$; $P(N) = 0,3$ y $P(V) = 0,5$.
a) ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bolilla roja o negra?
b) ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bolilla roja o verde?

Ejercicio 4. Expresar la unión de dos eventos como unión de eventos disjuntos. Dar más de una de estas expresiones.

Ejercicio 5. Se saca una carta de un mazo de 50 cartas. Sean los eventos:
A: la carta extraída es de copa,
B: la carta extraída es un rey,
C: la carta extraída es un 9, 10, 11 ó 12,
D: la carta extraída es de copa o de bastos,
E: la carta extraída es copa u oro. Describir con palabras los eventos enunciados a continuación: (i) $A \cap B$, (ii) $A \cap C^c$, (iii) $(B \cap A) \cup (B \cap E)$, (iv) $D \cap E$, (v) $E \cap D$ y (vi) $(C \cup D \cup A)^c$.

Ejercicio 6. En Alsacia, de 140.000 personas que declaran comprar por lo menos un diario, se obtienen las siguientes informaciones:
A: 100.000 individuos compran "Últimas Noticias",
B: 30.000 individuos compran sólamente "Nuevo Alsaciano",
C: 3.000 individuos compran "Últimas Noticias" y "Alsacia" pero no compran "Nuevo Alsaciano",
D: 9.000 individuos compran "Últimas Noticias" y "Nuevo Alsaciano",
E: 126.000 individuos compran sólo un diario regional,
F: 1.000 individuos compran los tres diarios regionales.
i) ¿Cuántos individuos compran exactamente dos diarios regionales? ¿Cuántos por lo menos dos?
ii) ¿Cuántos individuos compran "Alsacia"? ¿Cuántos no lo compran?

Ejercicio 7. Mostrar que si $B \subset A$, entonces $P(A - B) = P(A) - P(B)$.

Ejercicio 8. Mostrar que $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Ejercicio 9. De una urna que contiene 15 bolillas numeradas de 1 a 15 se extraen 3 bolillas al azar. Calcular la probabilidad de que la muestra extraída contenga a la primera bolilla.

Ejercicio 10. Una urna contiene 10 bolillas blancas y 12 rojas. Se extraen 7 bolillas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la muestra extraída incluya exactamente 4 bolillas blancas?

Ejercicio 11. Se extrae al azar una carta de un mazo español.
a) Describir un espacio muestral. b) ¿Cuántos eventos simples tiene el espacio muestral? c) ¿Cuál es la probabilidad de que la carta extraída sea el as de espada? d) ¿Cuál es la probabilidad de que la carta sea un oro?

Ejercicio 12. Se arrojan dos dados distinguibles, consecutivamente:
a) ¿Cuántos puntos (eventos simples) tiene el espacio muestral?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas caras sean 5?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de las caras sea 5?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos números sean iguales?
e) ¿Cuál es la probabilidad de que el número del primero sea mayor que el del segundo?

Ejercicio 13. Se arroja una moneda, con un 1 de un lado y un 2 del otro, y un dado equilibrado. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números sea: (i) 3?, (ii)7?, (iii)5?, (iv)8?

Ejercicio 14. Si $P(A) = \frac{1}{3}$ y $P(B^c) = \frac{1}{4}$, ¿pueden A y B ser disjuntos? Explicar.

Ejercicio 15. Probar o dar un contraejemplo de las siguientes proposiciones:
a) Si $P(A) = P(B) = p$ entonces $P(A \cap B) \leq p^2$.
b) Si $P(A) = P(B^c)$ entonces $A^c = B$.
c) Si $P(A) = 0$ entonces $A = \emptyset$.

Ejercicio 16. Considerando el problema de seleccionar dos aspirantes de un grupo de cinco para un empleo, imagine que los aspirantes difieren en su grado de formación, 1 es el mejor, 2 es el segundo mejor y así sucesivamente para 3, 4 y 5. El jefe de personal naturalmente no sabe nada de esta clasificación.
a) Defina los siguientes eventos A y B: A: el jefe de personal selecciona el mejor y uno de los peores aspirantes, o sea, los aspirantes 1 y 4 o bien 1 y 5. B: el jefe de personal selecciona por lo menos uno de los dos mejores.
b) Encuentre las probabilidades de estos eventos.

Ejercicio 17. Las siguientes son 4 muestras que corresponden al experimento "lanzar una moneda". En la primera muestra se hicieron 20 repeticiones, en la segunda 30, en la tercera 40 y en la cuarta 50. Interpretar el fenómeno de regularidad estadística.
(i) $c, s, c, c, s, s, s, c, c, c, c, s, s, c, s, c, s, s, s, s.$
(ii) $s, c, s, c, c, c, s, s, c, s, s, s, s, c, s, c, c, s, s, c, c, s, s, s, c, s, c, s, s, c.$
(iii) $c, s, c, s, c, s, c, c, s, s, c, c, c, s, s, s, c, s, c, s, c, s, c, c, s, s, c, s, c, c, s, s, s, c, s, c, c, s, s, c.$
(iv) $c, s, c, s, c, c, s, s, s, c, c, s, s, c, c, c, s, s, c, c, s, s, c, c, s, s, s, c, c, s, s, c, s, c, s, c, s, c, c, s, s,$
$s, c, c, s, c, c, s, c, s.$

Ejercicio 18. Se sabe que la probabilidad de que el peso de un hombre en determinada ciudad esté entre 70 y 80 kg. es de 0,48. Si se seleccionan 30 individuos al azar en esa ciudad, ¿cuántos de ellos uno debería esperar que tengan un peso comprendido entre esos dos valores?

Ejercicio 19. Considerando el experimento: "tirar dos dados y observar el número de puntos que aparecen en las dos caras":

a) Proponer una distribución de probabilidad asociada a este experimento.
b) Verificar que es distribución de probabilidad.

c) Calcular la probabilidad de que a lo sumo 10 puntos y por lo menos 5 puntos aparezcan en las dos caras.
d) Construir un diagrama.

Ejercicio 20. Se extraen tres bolas sin reemplazo de una urna que contiene 4 bolas rojas y 6 blancas.
a) Proponer un modelo para el número de bolas rojas extraídas.
b) Calcular la probabilidad de que entre las extraídas haya a lo sumo 2 bolas rojas.

Ejercicio 21. Sean A_1, A_2 y A_3 sucesos tales que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$ y $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3$. Sabiendo que $P(A_1) = \frac{1}{4}$ y que $P(A_2) = \frac{1}{2}$, hallar $P(A_3)$.

Ejercicio 22. Dado el espacio muestral $\Omega = \{C, S\}$ y la distribución de probabilidad P_1 definida por $P_1(\emptyset) = 0$, $P_1(\{C\}) = P_1(\{S\}) = \frac{1}{2}$ y $P_1(\Omega) = 1$, verificar que si $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ es una sucesión tal que $A_1 = \{C\}$, $A_2 = \{S\}$ y $A_i = \emptyset$ para cada $i \geq 3$, entonces

$$P_1(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P_1(A_i).$$